Continuité et dérivabilité

Sommaire : - Continuité en un point x_0 / sur un intervalle I
- dérivabilité " "
- Interprétation géométrique
  (tg ; demi-tg verticale ; point anguleux)
- fonction composée

Q_1 : Continuité

① en un point x_0 : $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

② sur un intervalle I (Rédaction).

② → polynôme, cos(), sin() sont continues sur $\mathbb{R}$.
→ toute fonction est continue sur son D_f (ouvert)

Rq : pour déterminer le domaine de définition :
→ dénominateur $\neq 0$.
→ sous la racine carrée ≥ 0.
→ à l'intérieur du ln() > 0

exemple : Mq $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$?

Rép : $x \mapsto 4x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) en particulier sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ et positive (≥ 0) sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$

donc $x \mapsto \sqrt{4x+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$

$x \mapsto x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) en particulier sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ et $\neq 0$ sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$.

donc $x \mapsto \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ comme étant le quotient de deux fonctions continues.

⚠ si l'intervalle est fermé $[a,b]$, il faut ajouter les bornes

exemple : Mq f est continue sur $[a,b]$:
→ continuité sur $]a,b[$ (Rédaction)
→ continuité à droite en a ($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$)
→ continuité à gauche en b ($\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b)$).

Q_2 : dérivabilité

① en un point x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$ réel fini

② sur un intervalle I (Rédaction) comme la continuité.

Q_3 : Interpréter géométriquement le résultat ?

→ les asymptotes (fiche de méthode séparée).
→ si f est dérivable en x_0 : on a une tg d'équation :

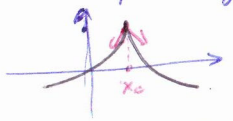
$$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

→ si f n'est pas dérivable en x_0 :

① $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$

② $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

① C f admet un point anguleux



② C f admet une demi-tg verticale
dirigée vers le haut si $x_0^+ \to +\infty$, $x_0^- \to -\infty$.
dirigée vers le bas si $x_0^+ \to -\infty$, $x_0^- \to +\infty$.

Q_4 : Continuité / dérivabilité d'une fonction composée ?

$f \circ g(x) = f[g(x)]$.

Th : si g est continue / dérivable sur I
f est continue / dérivable sur J : $(f(I) \subset J)$ (généralement $\mathbb{R}$).
donc $f \circ g$ est continue / dérivable sur I.

exemple : Mq $f(x) = \sin(6x)$ est dérivable sur $]-1,1[$.

$x \mapsto 6x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-1,1[$
$x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($]-1,1[\subset \mathbb{R}$)
$x \mapsto \sin(6x)$ est dérivable sur $]-1,1[$.

$$(f \circ g)' = (f[g(x)])' = g'(x) f'[g(x)]$$

exemple : $f'(x) = (\sin(6x))' = 6\cos(6x)$.

B. M Takiedeine
23.390.248

Oarray.tn Agra Blech Oarray.tn